離散型非線性船舶系統之平衡模糊控制器設計

張文哲[+#]　孫建中[*]　劉勝溢[+]

摘要

大多數船舶系統都是非線性的，例如船舶航行操控系統、鍋爐溫度及壓力控制系統等都是非線性的系統，然而，由於非線性系統的控制理論複雜，在實際應用中很難使用非線性的控制方法來達到良好的控制行為，因此，大部份的場合都是採取線性的控制法則來近似求解這些非線性系統的控制器。但是線性的控制方法確實存在著誤差無法消除的問題，所以在這篇論文中，我們嘗試使用 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊系統來近似非線性的船舶系統，並將線性系統中的平衡觀念應用在 T-S 模糊系統上，我們發展出一個設計 T-S 平衡型模糊控制器的方法，並推導出平衡型模糊控制器存在的條件，最後，我們提供了一個簡單的數值例子來說明本設計方法的可用性。

第一節　前言

在自然界中，大多數的物理系統都是非線性者居多，舉凡船舶科技中的船舶航行操控系統、船舶主機控制系統，以致航太工程中的飛彈導航控制系統及衛星無線通訊系統皆是非線性系統的行為表現。以往的研究文獻中，雖有直接對這些非線性系統的研究，但由於這些非線性系統理論過於複雜，且大多是針對特定的系統做開發設計，因此，非線性控制理論的應用仍有其相當的使用限制。反觀線性系統的研究，在理論上可以提供一個較簡便易懂的發展程序，但因其做線性化的過程中，往往造成極大的誤差效應，因此，在實際的工程應用中也是常常為使用者所詬病。為了解決這兩者的缺點，Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型系統提供了一個相當不錯的解答。這個不久前才被發展出來的系統，不但具有非線性系統理論的特質，可以保有自然物理系統的非線性特徵，同時又具有線性系統理論的優勢，可以利用簡單的理論推導得到實際有效的控制器設計結果，因此，本篇論文嘗試應用此一模型來描述船舶航行操控等非線性系統，並希望結合系統平衡化的觀念來提升最後控制結果的價值。這裡所說得系統平衡化觀念，主要是指系統的可控性葛倫密恩 (Controllability Gramian) 矩陣及可觀性葛倫密恩 (Observability Gramian) 矩陣能夠藉由控制器的設計，最後達到相等的目的。在線性系統的理論中，可控性葛倫密恩矩陣觀念同時存在隨機與非隨機控制問題中。在葛倫密恩的構造，或是它的奇異值和向量的特徵，可以看出關於系統能量遞減有多快和能量遞減的方向。

張文哲　海洋大學輪機工程技術系　副教授
孫建中　中央大學電機工程研究所　研究生
劉勝溢　海洋大學輪機工程技術系　學生

在［1］中有概略解釋，其中葛倫密恩矩陣的表示為描述藉由單位能量輸入而使那些狀態可以達到具有橢圓形曲線的特徵。橢圓形曲線的遞減指出由於輸入能量的某些方向是更為可控制的。同時，葛倫密恩矩陣可解釋成當一個二次形式的特徵矩陣，並能提供里阿柏諾（Lyapunov）函數給系統。在隨機系統中，當系統於長時間受雜訊刺激時葛倫密恩矩陣可視為如狀態向量的能量變化。就本身存在而論，葛倫密恩矩陣影響狀態估測器的收斂特性。

根據葛倫密恩矩陣的觀念，研究“平衡”對等轉換提供一個令人感興趣的可控性葛倫密恩矩陣物理上的解釋［2-3］。這些想法有許多來自［1］，平衡對等轉換的特性是往往能夠將高階的系統用低階系統來描述。這些研究方法被稱為“模式簡化”［4-8］。平衡逼近是一個實際設計上值得採用的方法，在一維（1D）和二維（2D）系統中是用於減少階數的方法。在其他方面，這平衡的觀念也與其他的控制理論有關［4, 9-11］，以發展出新的控制技術。

由於平衡系統有許多的優點，所以我們企圖去發展平衡的觀念到別的控制領域中。　T-S 模糊系統是一個適合的主題，因為 T-S 模糊模型是由線性系統所組成。再者，T-S 模糊系統有許多的優點可用於非線性系統中［12-20］。因此，對於 T-S 模糊系統我們考慮應用平衡的觀念。為了要達成這個想法，我們可以假設 T-S 模糊系統的子系統為平衡系統。如果子系統為平衡系統，T-S 模糊模型被稱為“T-S 平衡型模糊系統”。基於平衡型模糊系統，我們可以去設計平衡型模糊控制器。平衡型模糊系統的優點為對於原始 T-S 模糊模型可以簡化其階數。由於這個原因，這個控制的問題將比原系統簡單。但在這篇論文，我們只討論離散平衡型模糊控制器的設計技術。對於離散 T-S 平衡型模糊系統，其穩定條件為根據共同可控性葛倫密恩矩陣［18］和可觀性葛倫密恩矩陣［19］的里阿柏諾等式得到。根據這些穩定條件，我們將可以推論出一些求得平衡模糊控制器的條件。

這篇論文的結構如下：在第二節提出離散 T-S 平衡型模糊系統，同時我們將討論共同可控性和可觀察性葛倫密恩矩陣的穩定條件。在第三節，我們將推論求出離散 T-S 平衡型模糊控制器的一些條件。對於設計方法的應證，我們在第四節提供一個數值的例子。最後，第五節為總結。

第二節　離散 T-S 平衡型模糊模型的討論

在我們應用平衡觀念在 T-S 模糊模型之前，我們必須介紹 T-S 模糊模型的特性。T-S 型模糊模型為用“假如....則”規則描述，經由“假如....則”模糊規則和歸屬函數，我們可以將非線性系統分解為數個線性系統。T-S 模糊模型的優點在文獻［12-20］中有討論。現在開始讓我們來描述 T-S 類型的模糊模型。

$Rule^{i}$:

假如 $x_1(\mathrm{k})$ 是 M_{i1} … 且 $x_{n_x}(\mathrm{k})$是 M_{in_x}

則 $x(k+1)=\mathbf{A}_i\, x(k)+\mathbf{B}_i\, u(k)$ 且 $y(k)=\mathbf{C}_i\, x(k)$ (1)

其中 $x(k)\in\Re^{n_x}$ 為狀態向量；$u(k)\in\Re^{n_u}$ 為控制輸入向量；$y(k)\in\Re^{n_y}$ 為輸出向量；i=1, 2, …r 且 r 為"假如....則"規則的數目。M_{ij} 為模糊集合，$(\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i,\mathbf{C}_i)$ 是(1)式系統中第 i 個子系統，其中 $\mathbf{A}_i\in\Re^{n_x\times n_x}$，$\mathbf{B}_i\in\Re^{n_x\times n_u}$，$\mathbf{C}_i\in\Re^{n_y\times n_x}$。給定一組$(x(k),u(k))$，所有 T-S 模糊模型的動態和輸出的方程式分別表示如下：

$$x(k+1)=\frac{\sum_{i=1}^{r}\omega_i(k)\{\mathbf{A}_i\, x(k)+\mathbf{B}_i\, u(k)\}}{\sum_{i=1}^{r}\omega_i(k)} \tag{2a}$$

$$y(k)=\frac{\sum_{i=1}^{r}\omega_i(k)\mathbf{C}_i\, x(k)}{\sum_{i=1}^{r}\omega_i(k)} \tag{2b}$$

其中

$$\omega_i(k)=\prod_{j=1}^{n_x}M_{ij}(x_j(k)) \tag{3}$$

且 $M_{ij}(x_j(k))$為$x_j(k)$在M_{ij}中歸屬度的大小；$\omega_i(k)$為第 i 個規則下的比重。

為了要控制離散的 T-S 型模糊模型，平行分配補償器 (PDC) 的觀念由 Tanaka 等人發展於文獻 [17] 中提出。基於 PDC 的觀念，離散系統的狀態回授模糊控制器可用下列方式表示：

$Rule^i$:

IF $x_1(k)$ is M_{i1} … and $x_{n_x}(k)$ is M_{in_x}

THEN $u(k)=\mathbf{F}_i\, x(k)$ (4)

其中 i=1, 2, …r 且 r 為"假如....則"規則的數目。因此，離散模糊控制器

可表示如下形式：

$$u(\mathrm{k})=\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}}\omega_{\mathrm{i}}(\mathrm{k})[\mathbf{F}_{\mathrm{i}}\,x(\mathrm{k})]}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}}\omega_{\mathrm{i}}(\mathrm{k})} \tag{5}$$

其中 $u(\mathrm{k})$ 為非線性狀態回授控制器。

將(5)式代入(2a)式， 我們得到所有閉迴路模糊系統的動態狀態如下：

$$x(\mathrm{k}+1)=\frac{1}{\mathbf{W}}\left\{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{r}}\omega_{\mathrm{i}}(\mathrm{k})\omega_{\mathrm{j}}(\mathrm{k})[\mathbf{A}_{\mathrm{i}}+\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\mathbf{F}_{\mathrm{j}}]x(\mathrm{k})\right\} \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{W}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{r}}\omega_{\mathrm{i}}(\mathrm{k})\omega_{\mathrm{j}}(\mathrm{k}) \tag{7}$$

此 $\mathbf{W}$ 表示為離散系統的全部比重。整理(6)式可得

$$x(\mathrm{k}+1)=\frac{1}{\mathbf{W}}\left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}}\omega_{\mathrm{i}}(\mathrm{k})\omega_{\mathrm{i}}(\mathrm{k})\{\mathbf{A}_{\mathrm{i}}+\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\mathbf{F}_{\mathrm{i}}\}x(\mathrm{k})+2\sum_{\mathrm{i}<\mathrm{j}}\omega_{\mathrm{i}}(\mathrm{k})\omega_{\mathrm{j}}(\mathrm{k})\mathbf{R}_{\mathrm{ij}}\,x(\mathrm{k})\right] \tag{8}$$

其中

$$\mathbf{R}_{\mathrm{ij}}=\frac{\{\mathbf{A}_{\mathrm{i}}+\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\mathbf{F}_{\mathrm{j}}\}+\{\mathbf{A}_{\mathrm{j}}+\mathbf{B}_{\mathrm{j}}\mathbf{F}_{\mathrm{i}}\}}{2},\quad \mathrm{i}<\mathrm{j} \tag{9}$$

注意 $\mathbf{R}_{\mathrm{ij}}$ 表示為每個規則之間的影響。

在介紹完離散的 T-S 模糊系統之後，現在敘述 T-S 模糊模型的穩定條件。

引理一 [20]

假如存在一個共同正定矩陣 $\mathbf{P}$ 以致下列兩個條件被滿足，則廣義的離散模糊控制系統(8)式將是漸進穩定。

$$(\mathbf{A}_{\mathrm{i}}+\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\mathbf{F}_{\mathrm{i}})\mathbf{P}(\mathbf{A}_{\mathrm{i}}+\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\mathbf{F}_{\mathrm{i}})^{\mathrm{T}}-\mathbf{P}<0,\ \mathrm{i}=1,2,\ \ldots,\ \mathrm{r} \tag{10}$$

$$\mathbf{R}_{ij}\mathbf{P}\mathbf{R}_{ij}^{T}-\mathbf{P}<0,\quad i<j\leq r \tag{11}$$

#

基於引理一，當滿足(10)式及(11)式時，則 T-S 模糊系統為漸進穩定。如果我們使用葛倫密恩矩陣觀念去分析 T-S 模糊系統，則引理一的里阿柏諾不等式可改寫成下列表示：

可控性葛倫密恩觀念之穩定分析 [18]:

$$(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)\mathbf{G}_c(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)^{T}-\mathbf{G}_c+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^{T}=0,\ \mathbf{i=1,2,\ldots,r} \tag{12}$$

$$\mathbf{R}_{ij}\mathbf{G}_c\mathbf{R}_{ij}^{T}-\mathbf{G}_c<0,\ i<j\leq r \tag{13}$$

可觀性葛倫密恩觀念之穩定分析 [19]:

$$(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)^{T}\mathbf{G}_o(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)-\mathbf{G}_o+\mathbf{C}_i^{T}\mathbf{C}_i=0,\ \mathbf{i=1,2,\ldots,r} \tag{14}$$

$$\mathbf{R}_{ij}^{T}\mathbf{G}_o\mathbf{R}_{ij}-\mathbf{G}_o<0,\quad i<j\leq r \tag{15}$$

其中 $\mathbf{G}_c$ 和 $\mathbf{G}_o$ 被稱為共同可控性葛倫密恩矩陣及共同可觀性葛倫密恩矩陣，其定義如下：

$$\mathbf{G}_c\equiv\mathbf{G}_{ci}=\sum_{k=0}^{T}e^{A_ik}\,\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^{T}\,e^{A_i^{T}k} \tag{16}$$

$$\mathbf{G}_o\equiv\mathbf{G}_{oi}=\sum_{k=0}^{T}e^{A_ik}\,\mathbf{C}_i^{T}\mathbf{C}_i\,e^{A_i^{T}k} \tag{17}$$

如果離散 T-S 模糊模型是平衡的系統，這代表矩陣 $\mathbf{G}_c$ 和 $\mathbf{G}_o$ 為相等且同為對角矩陣（即 $\mathbf{G}=\mathbf{G}_c=\mathbf{G}_o$）。因此，我們整理上述主題後，可說明離散 T-S 平衡型模糊模型的穩定條件。

引理二

假如存在一共同正定且為對角矩陣$\mathbf{G}$，並且使下列方程式被滿足，則在廣義下由(8) 式所描述之離散 T-S 平衡型模糊模型將是漸進穩定。

$$(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)\mathbf{G}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)^T - \mathbf{G} + \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^T = 0, \quad i=1, 2, \ \ldots, \ r \tag{18}$$

$$(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)^T\mathbf{G}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i) - \mathbf{G} + \mathbf{C}_i^T\mathbf{C}_i = 0, \quad i=1, 2, \ \ldots, \ r \tag{19}$$

$$\mathbf{R}_{ij}\mathbf{G}\mathbf{R}_{ij}^T - \mathbf{G} < 0, \quad i < j \le r \tag{20}$$

$$\mathbf{R}_{ij}^T\mathbf{G}\mathbf{R}_{ij} - \mathbf{G} < 0, \quad i < j \le r \tag{21}$$

#

根據引理二可知很重要的一點為：要求出 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{F}_i$ 以使離散 T-S 平衡型模糊模型是漸進穩定就必須要滿足引理二的四個條件。

第三節 推論求解離散 T-S 平衡型模糊控制器的條件

在這一節中， 我們將推導一些條件，當我們在求解離散 T-S 平衡型模糊控制器時，我們考慮給定一個共同正定且為對角的矩陣$\mathbf{G}$，基於這固定的矩陣$\mathbf{G}$，我們將可依推導出一些使得$\mathbf{F}_i$存在的條件，並滿足引理二的穩定條件要求。現在，我們第一個目標是使用共同可控性葛倫密恩矩陣來設計狀態回授增益。

定理一

給定一共同可控性葛倫密恩矩陣$\mathbf{G}_c > 0$。針對一些已知的矩陣$\hat{\mathbf{Z}}_i$，要使每一個子規則存在一個狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 滿足(18)式，若且唯若

$$\mathbf{G}_c - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^T = \left[(\mathbf{I} - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+)\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\hat{\mathbf{Z}}_i\right]\mathbf{G}_c\left[(\mathbf{I} - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+)\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\hat{\mathbf{Z}}_i\right]^T \tag{22}$$

若(22)式滿足成立，則每一個子規則的狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 表示如下：

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{B}_i^+(\mathbf{A}_i - \hat{\mathbf{Z}}_i) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+)\mathbf{Z}_i \tag{23}$$

其中 $\mathbf{Z}_i$ 為任意矩陣。

證明：

令 $\mathbf{G}_c = \Gamma_c\Gamma_c^T$（$\Gamma_c$ 不是唯一）且滿足(18)式，並定義：

$$\mathbf{L}_i = (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)\Gamma_c \tag{24}$$

則 (18)式可改寫成如下形式：

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^T + \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^T \tag{25}$$

必要條件之證明:

假定如果 $\mathbf{F}_i$ 存在而滿足(24)式，且 $\mathbf{F}_i$ 能由(24)式求出，若且唯若 [21-22]

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\left(\mathbf{L}_i-\mathbf{A}_i\Gamma_c\right)=0 \tag{26}$$

一旦(26)式可成立， 狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 可由下式求得 [21-22]。

$$\mathbf{F}_i=-\mathbf{B}_i^+\left(\mathbf{L}_i\Gamma_c^{-1}-\mathbf{A}_i\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{Z}_i \tag{27}$$

其中 $\mathbf{Z}_i$ 為任意矩陣。從(26)式中解出 $\mathbf{L}_i$ ，可得

$$\mathbf{L}_i=\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i\Gamma_c+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\widetilde{\mathbf{Z}}_i \tag{28}$$

將(28)式代入(25)式得

$$\mathbf{G}_c-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^T=\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\hat{\mathbf{Z}}_i\right]\mathbf{G}_c\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\hat{\mathbf{Z}}_i\right]^T \tag{29}$$

其中 $\hat{\mathbf{Z}}_i\equiv\widetilde{\mathbf{Z}}_i\Gamma_c$ 為任意的矩陣。 將(28)式代入(27)式可得

$$\mathbf{F}_i=-\mathbf{B}_i^+\left(\mathbf{A}_i-\hat{\mathbf{Z}}_i\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{Z}_i \tag{30}$$

以上證明了必要條件的部份。

充分條件之證明:

對於充分條件之證明，我們假設(29)成立，於是可由(30)式得到 $\mathbf{F}_i$ 。將(30)式代入(24)式可得(28)式。由於(28)式可因此成立，故充分條件之證明便因此完成。

#

在推導共同可控性葛倫密恩矩陣的控制器設計之後，我們將開始討論使用共同可觀性葛倫密恩矩陣設計狀態回授增益。

定理二

給定一共同可觀察葛倫密恩矩陣 $\mathbf{G}_o>0$ 。針對一些已知的矩陣 $\overline{\mathbf{Z}}_i$ ，要使每一個子規則存在一個狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 滿足(19)式，若且唯若

$$\mathbf{G}_o-\mathbf{C}_i^T\mathbf{C}_i=\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\overline{\mathbf{Z}}_i\right]^T\mathbf{G}_o\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\overline{\mathbf{Z}}_i\right] \tag{31}$$

如果 (31)可滿足， 每一個子規則的狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 可表示如下：

$$\mathbf{F}_i=-\mathbf{B}_i^+\left(\mathbf{A}_i-\overline{\mathbf{Z}}_i\right)+\left(\mathbf{I}-\Gamma_o\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\Gamma_o^+\right)\mathbf{Z}_i \tag{32}$$

其中$\mathbf{G}_o \equiv \Gamma_o^T\Gamma_o$，且 $\mathbf{Z}_i$ 為任意矩陣。

證明:

令 $\mathbf{G}_o \equiv \Gamma_o^T\Gamma_o$（$\Gamma_o$ 不是唯一），其滿足(19)式且假設

$$\mathbf{M}_i = \Gamma_o(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i) \tag{33}$$

則(19)式可改寫成下式：

$$\mathbf{G}_o = \mathbf{M}_i^T\mathbf{M}_i + \mathbf{C}_i^T\mathbf{C}_i \tag{34}$$

必要條件之證明:

假定 $\mathbf{F}_i$ 滿足(33)式且存在， 則 $\mathbf{F}_i$ 能由(33)式求解得知，若且唯若 [21-22]

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{bi}\mathbf{R}_{bi}^+)(\mathbf{M}_i - \mathbf{R}_{ai}) = 0 \tag{35}$$

其中 $\mathbf{R}_{bi} \equiv \Gamma_o\mathbf{B}_i$，且 $\mathbf{R}_{ai} \equiv \Gamma_o\mathbf{A}_i$。 一旦(35)式可滿足， 由(36)式則可得到狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 如下:

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{R}_{bi}^+(\mathbf{M}_i - \mathbf{R}_{ai}) + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{bi}^+\mathbf{R}_{bi})\mathbf{Z}_i \tag{36}$$

其中 $\mathbf{Z}_i$ 為任意矩陣。從(35)式解出 $\mathbf{M}_i$， 可得

$$\mathbf{M}_i = \Gamma_o(\mathbf{I} - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+)\mathbf{A}_i + \Gamma_o\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\overline{\mathbf{Z}}_i \tag{37}$$

其中 $\overline{\mathbf{Z}}_i \equiv \Gamma_o\widetilde{\mathbf{Z}}_i$ 為任意的矩陣。將(37)式代入(34)式可得

$$\mathbf{G}_o - \mathbf{C}_i^T\mathbf{C}_i = \left[(\mathbf{I} - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+)\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\overline{\mathbf{Z}}_i\right]^T\mathbf{G}_o\left[(\mathbf{I} - \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+)\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\overline{\mathbf{Z}}_i\right] \tag{38}$$

將(37)式代入(36)式得到

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{B}_i^+(\mathbf{A}_i - \overline{\mathbf{Z}}_i) + (\mathbf{I} - \Gamma_o\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\Gamma_o^+)\mathbf{Z}_i \tag{39}$$

充分條件之證明:

此部份之證明過程和定理一相似。 因此，在此略過，請讀者自行參酌定理一之充分條件的證明部份。

#

我們可以結合定理一和定理二的結果，解出平衡型模糊控制器。因此，我

們最後得到定理三的結論。

定理三

給定一正定且對角的矩陣 $\mathbf{G}$，針對一些已知的矩陣 $\hat{\mathbf{Z}}_i$ 及 $\overline{\mathbf{Z}}_i$，要使每一個子規則存在一個狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 同時滿足(18)及(19)式，若且唯若

$$\mathbf{G}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^T=\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\hat{\mathbf{Z}}_i\right]\mathbf{G}\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\hat{\mathbf{Z}}_i\right]^T$$

(40a)

$$\mathbf{G}-\mathbf{C}_i^T\mathbf{C}_i=\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\overline{\mathbf{Z}}_i\right]^T\mathbf{G}\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\overline{\mathbf{Z}}_i\right] \tag{40b}$$

$$-\mathbf{B}_i^+\left(\mathbf{A}_i-\overline{\mathbf{Z}}_i\right)+\left(\mathbf{I}-\Gamma_o\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\Gamma_o^+\right)\mathbf{Z}_i=-\mathbf{B}_i^+\left(\mathbf{A}_i-\hat{\mathbf{Z}}_i\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{Z}_i \tag{40c}$$

其中 $\mathbf{Z}_i$ 為任意矩陣。

再者，若(40)式中之各式皆成立的話，離散 T-S 平衡型模糊系統的狀態回授增益 $\mathbf{F}_i$ 可由下列方程式計算：

$$\mathbf{F}_i=-\mathbf{B}_i^+\left(\mathbf{A}_i-\hat{\mathbf{Z}}_i\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^+\right)\mathbf{Z}_i \tag{41}$$

#

從定理三中，如果我們給定一正定且為對角的矩陣 $\mathbf{G}$ 並且存在 $\hat{\mathbf{Z}}_i$ 和 $\overline{\mathbf{Z}}_i$ 以使(40a-40c)可以滿足，則我們可以由(41)式求出 T-S 平衡型模糊控制器。在得到平衡型模糊控制器之後，我們必須檢查平衡型控制器是否滿足(20-21)式。我們必須注意並非所有的 T-S 模糊系統都為平衡系統。換句話說，平衡型的模糊系統是指 T-S 模糊模型的系統中，並須讓我們可以找出 $\mathbf{G}$，$\hat{\mathbf{Z}}_i$ 和 $\overline{\mathbf{Z}}_i$ 來滿足(40a-40c)式者。說明如何設計離散 T-S 平衡型模糊控制器，我們提出一個數值形式的例子來證實我們所發展的設計方法。

第四節　數值範例

假設有一個非線性的船舶航行操控系統，可以使用 T-S 型式之模糊模型來示其動態行為之方程式，而此模型又可用下列兩個子規則形式表示如下：

Rule^1

假如 $x_1(k)$ 接近 0

則 $\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}_1\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}_1\mathbf{u}$ 且 $\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}_1\mathbf{x}(k)$

Rule^2

假如 $x_1(k)$ 接近 ±10

則 $\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}_2\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}_2\mathbf{u}$ 且 $\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}_2\mathbf{x}(k)$

其中

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&1&1\end{bmatrix},\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\3&1&-2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}0.8&0&0\\0&0.8&0\\0&0.2&0.8\end{bmatrix},\ \mathbf{C}_1=\mathbf{C}_2=\begin{bmatrix}0.8&0&0\\0&0.8&0.2\\0&0&0.8\end{bmatrix}$$

假設 $x_1(k)\in(-10,10)$ 且 $x_1(k)$ 之歸屬函數如圖一所示。現在我們設定共同正定且為對角的葛倫密恩矩陣 $\mathbf{G}$ 如下所示：

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}0.64&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\tag{42}$$

將 $\mathbf{G}$ 代入(40a-40c)，求出 $\overline{\mathbf{Z}}_i$ 和 $\hat{\mathbf{Z}}_i$ (i=1,2) 以使 $\mathbf{G}$ 滿足(40)式，我們可得

$$\hat{\mathbf{Z}}_1=\overline{\mathbf{Z}}_1=\hat{\mathbf{Z}}_2=\overline{\mathbf{Z}}_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-0.8013&-0.1589\\0&-0.1589&0.8698\end{bmatrix}\tag{43}$$

將(43)式代入(41)式，我們得到每個規則的平衡型模糊控制器的狀態回授增益如下：

$$\mathbf{F}_1=\begin{bmatrix}0&-1.25&0\\0&-1.0017&-1.4487\\-2.5&-1.1983&0.1994\end{bmatrix}\tag{44a}$$

$$\mathbf{F}_2=\begin{bmatrix}0&-1.25&0\\0&-1.0017&-1.4487\\-3.75&-1.1983&3.9494\end{bmatrix}\tag{44b}$$

在我們得到狀態回授增益 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 之後， 我們必須要檢查(20)式和(21)式是否滿足。將(44)式代入(20)式和(21)式，我們得到

$$\mathbf{R}_{12}\mathbf{G}\mathbf{R}_{12}^{T}-\mathbf{G}=\begin{bmatrix}-0.64&0&0\\0&-0.64&-0.16\\0&-0.16&-0.68\end{bmatrix}<0\tag{45}$$

$$\mathbf{R}_{12}^{T}\mathbf{G}\mathbf{R}_{12}-\mathbf{G}=\begin{bmatrix}-0.64&0&0\\0&-0.64&-0.16\\0&-0.16&-0.68\end{bmatrix}<0\tag{46}$$

由上面的結果， 我們保證全部的模糊系統為漸進穩定。其模擬的結果如圖二至圖四所示，另外，其電腦模擬之起始條件為 $x(0)=[-1.5 \quad 0.5 \quad 1]^T$ 。

第五節 結論

在這篇論文中，我們結合應用了線性平衡系統和非線性 T-S 型模糊系統的相關觀念。基於這個觀念，對於設計離散 T-S 平衡型模糊控制器我們發展一個新的方法。離散 T-S 平衡型模糊模型的穩定條件是基於共同可控制性和可觀性葛倫密恩矩陣必須相等的觀念。在我們的推論中，我們得到一些條件可保證平衡型模糊控制器是存在的。利用這些條件我們設計出非常實用有效的非線性 T-S 型模糊控制器。我們希望這篇論文可以提供一些新的方向來解決有關非線性船舶系統的相關控制問題。

致 謝

本篇論文承蒙行政院國家科學委員會專題研究計畫經費補助，執行計畫編號為 NSC 89-2213-E-019-011，特此致謝。

參考文獻

[1] B. C. Moore, “Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability Observability, and Model Reduction,” *IEEE Trans. Automatic Contr.*, Vol. AC-26, pp. 17-32, 1981.

[2] H. C. Kim, C. H. Choi and S. B. Oh, “Model Reductions of Unstable SISO Systems Using Closed-form Gramians”, *Proc. of 35th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Vol. 4, pp. 4300-4304, NY, USA, 1996.

[3] B. Hanzon, “A New Balanced Canonical Form for Stable Multivariable Systems”, *Proc. of 32nd IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Vol. 3, pp. 2876-2877, San Antonio, TX, USA, 1993.

[4] C. L. Beck, J. Doyle and K. Glover, “Model Reduction of Multidimensional and Uncertain Systems”, *IEEE Trans. Automatic Contr.*, Vol. 41, No. 10, pp. 1466-1477,1996

[5] Z. Li, Y. Han and N.K. Sinha, “Model Reduction of a Flexible One-link Manipulator Using Power Balancing Approach”, *Proc. of 36th Midwest Symposium on Circuits and Syst.*, Vol. 2, pp. 1475-1479, N. Y., USA, 1993.

[6] S.A. Al-Baiyat and M. Bettayeb, "A New Model Reduction Scheme for K-power Bilinear Systems", *Proc. of 32nd IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Vol. 1, pp. 22-27, San Antonio, TX, USA, 1993.

[7] A. J. van der Schaft and J. E. Oeloff, "Model Reduction of Linear Conservative Mechanical Systems", *IEEE Trans. Automatic contr.*, Vol. 35, No. 6, pp. 729-733, 1990.

[8] V. Sreeram and P. Agathoklis, "Model Reduction of Linear Discrete Systems via Weighted Impulse Response Grammians", *Proc. of the 28th IEEE Conf. On Decision and Contr.*, Vol. 3, pp. 2431-2436, N. Y., USA, 1989.

[9] K. Glover, "All Optimal Hankel-norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their L^{∞}-error bounds", *Int. J. Contr.*, Vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.

[10] L. M. Silverman and M. Bettayeb, "Optimal Approximation of Linear Systems", *Proc. JACC*, San Francisco, CA, 1980.

[11] L. Xie; W. Y. Yan; Y. C. Soh, "L_2 Optimal Reduced Order Filter Design", *Proc. of 35th IEEE Conf. on Decision and Contr.*, Vol. 4, pp. 4270-4275, N. Y., USA, 1996.

[12] X. J. Ma and Z. Q. Sun, "Output Tracking and Regulation of Nonlinear System Based on Takagi-Sugeno Fuzzy Model", *IEEE Trans. on Systems, man, and Cyber.*, Vol. 30, No. 1, pp. 47-59, 2000.

[13] J. C. Lo and M. L. Lin, "An Uncertain Structure on Takagi-Sugeno Fuzzy Model", *Proc. of the 9th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Vol. 1, pp. 279-284, 2000.

[14] K. Tanaka and T. Hori, "New Robust and Optimal Designs for Takagi-Sugeno Fuzzy Control Systems", *Proc. of the 1999 IEEE Int. Conf. on Contr. Applications*, pp. 415-420, Hawaii, USA, 1999.

[15] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji and H. O. Wang, "Nonlinear Model Following Control Via Takagi-Sugeno Fuzzy Model", *Proc. of American Contr. Conf.*, pp. 1837-1841, San Diego, 1999.

[16] H. Ying, "Theory and Application of a Novel Fuzzy PID Controller Using a Simplified Takagi-Sugeno Rule Scheme", *Int. J. Information Sciences*, pp. 281-

293, 2000.

[17] H. O. Wang, K. Tanaka and M. Griffin, “Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model”, *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, pp. 531-538, Tokohama, Japan, 1995.

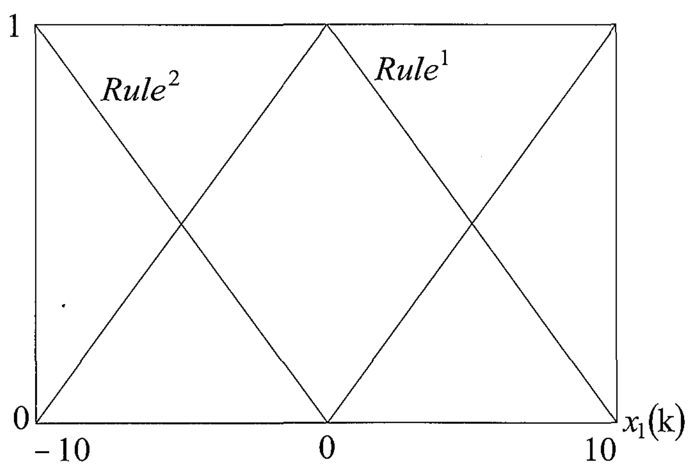
[18] W. J. Chang, C. C. Fuh and C. C. Sun, “A New Method of Designing Discerte Output Feedback Fuzzy Controllers”, *Proc. of 2000 Automatic Control Conference*, R. O. C., pp. 816-821, 2000.

[19] W. J. Chang, “Common Observability Gramian Assignment Using Discrete Fuzzy Control”, *Proc. of the 8th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Vol. 1, pp. 84-89, Seoul, Korea, 1999.

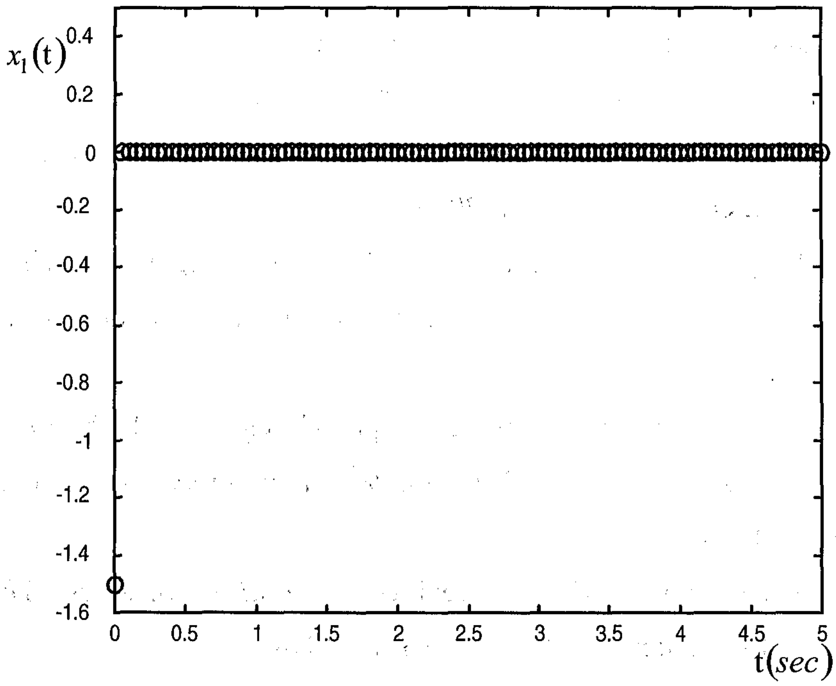
[20] K. Tanaka and M. Sano, “On the Concepts of Regular and Observer of Fuzzy Control Systems”, *Proc. of the 3rd IEEE Int. Fuzzy Systems Conf.*, pp. 767-772, Orlando, FL, USA, 1994.

[21] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Application*, John Wiley and Sons, New York, 1974.

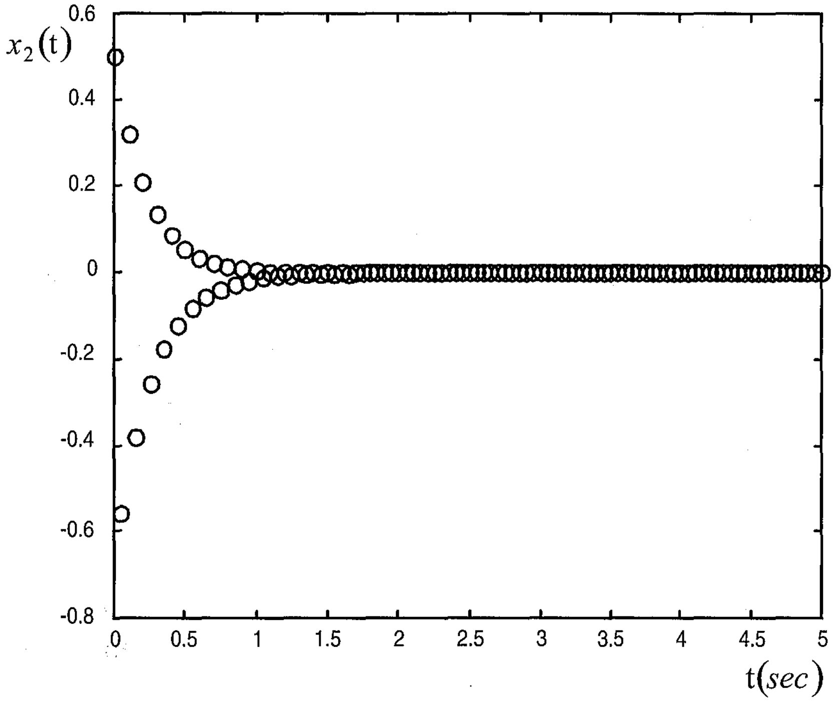
[22] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Dover, New York, 1991.



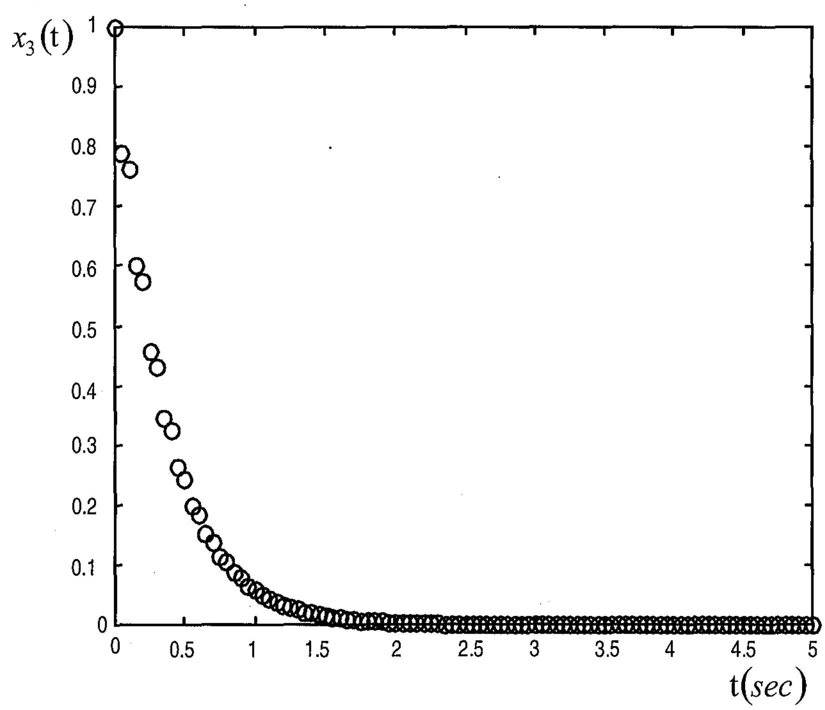
圖一 $x_1(k)$的歸屬函數圖



圖二 $x_1(k)$的響應結果



圖三　$x_2(k)$的響應結果



圖四　$x_3(k)$的響應結果